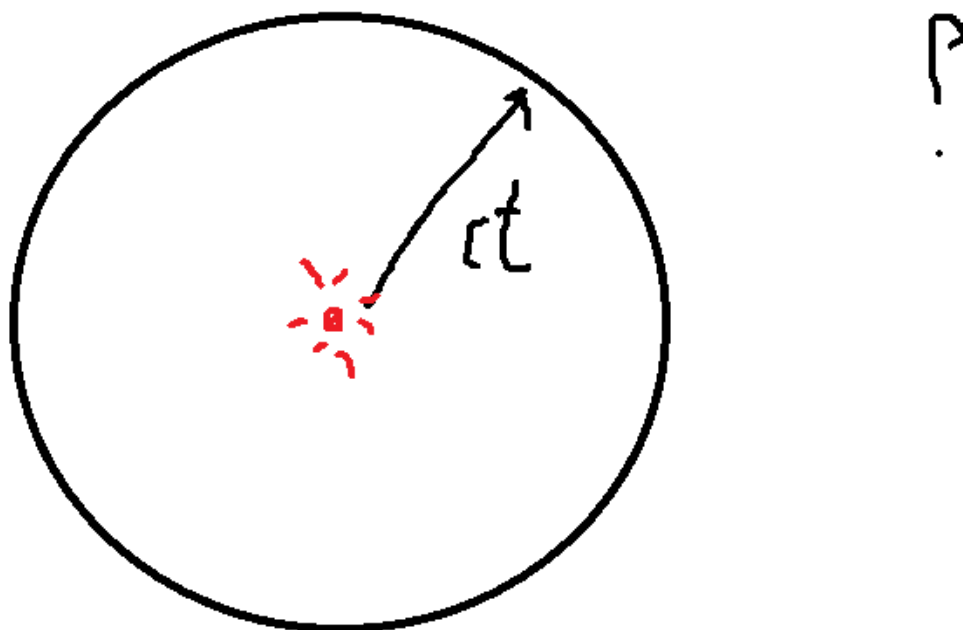


*К билетам 18-25.*

*ЗОН ФРЕНЕЛЯ ЗДЕСЬ НЕТ!!! И не потому, что автор их не понимает. Как раз наоборот – эта тема, которую легко объяснить устно, но письменно я обалдею это расписывать (тем более что её проще объяснить на задачах).*

Представим себе, что точечный источник за бесконечно малое время испустил импульс:



По пространству пойдёт сферическая волна.

Френеля заинтересовал вопрос: вот через время  $t$  вместо точечного источника у нас как бы сфера вторичных источников волны. А будет ли напряжённость в точке  $P$  (она справа) такой же, если мы вместо того, чтобы один точечный источник  $t$  назад времени чё-то испустил, просто также предложим за бесконечно малое время каждой точке сферы чё-то испустить?

Тем самым напряжённость в точке  $P$  можно расписать как интеграл некой

$$E(P) = \int_{\Sigma} \psi_1 dS$$

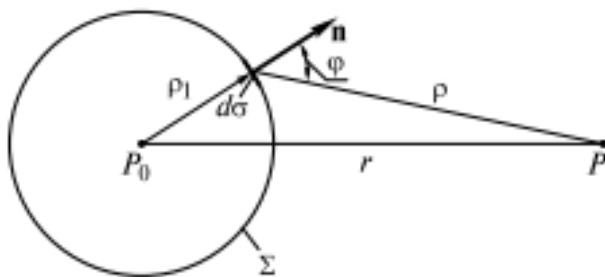
величины  $\mathcal{U}$ , имеющей размерность напряжённости, делённой на метры<sup>2</sup>, по площади?

( $\Sigma$  – это сфера, мы так записали интеграл по сфере).

Давайте попытаемся сконструировать интеграл Френеля. Напряжённость каждой точки на сфере, как мы помним из сферических волн, обратно пропорциональна радиусу:

$$\frac{e^{ik\rho_1}}{\rho_1}$$

( $\rho_0$  и  $\rho_1$  – расстояния, см. рисунок:



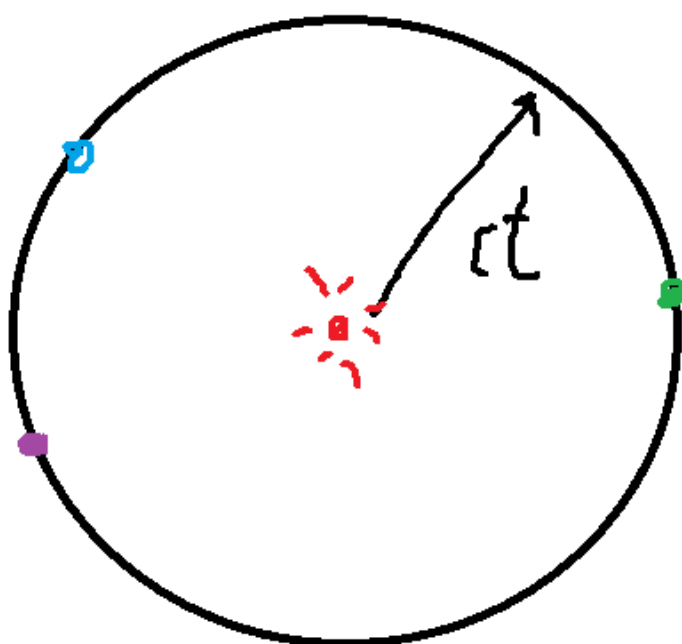
Однако вторичным волнам ещё надо пройти от сферы до точки P, что даст множитель

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho}$$

Итого:

$$E(P) = \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \frac{e^{ikr}}{r} dS$$

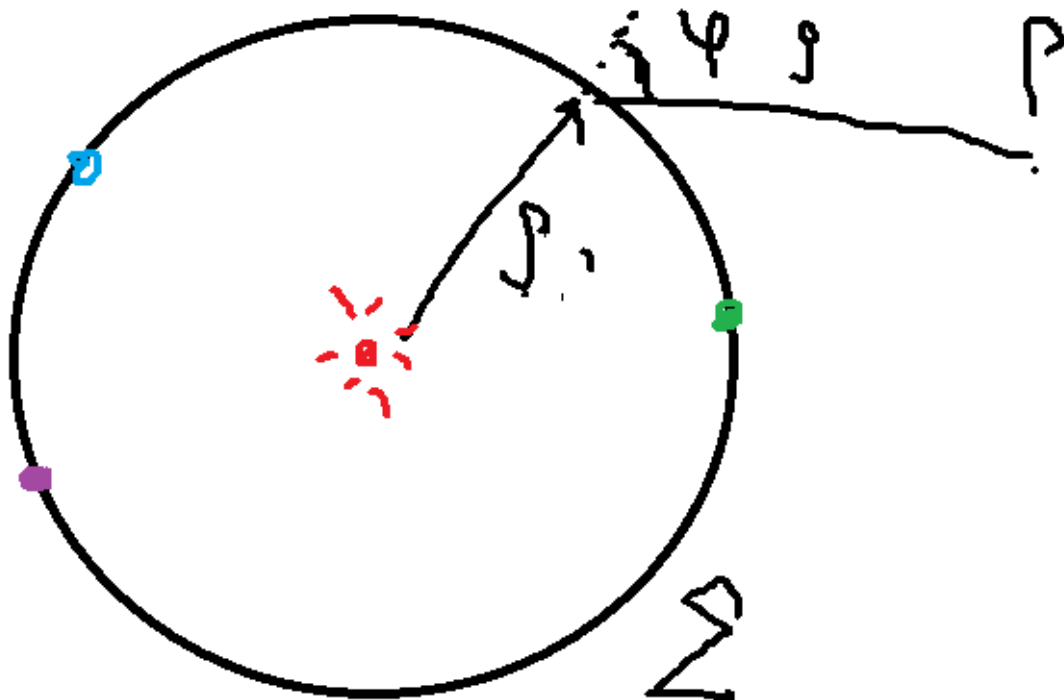
Однако заметим, что, очевидно, зелёная точка на сфере даст гораздо больший вклад в интенсивность в точке P, чем синяя и уж тем более фиолетовая:



P

Подумав, Френель вводит некую функцию угла  $\varphi$  – угла между радиус вектором точки на сфере и вектором из центра сферы в точку P.

Обозначается эта функция  $K(\varphi)$  и называется коэфом наклона. Очевидно (что было очевидно и Френелю), что при  $\varphi=0$  (зелёная точка)  $K(\varphi)$  максимальна, а при  $\varphi=180$  градусов (фиолетовая точка)  $K(\varphi)$  минимальна. А между ними она убывает.



Кстати, заметим, что если бы свет распространялся прямолинейный, то весь вклад давала бы одна зелёная точка, а все остальные давали нулевой. Но раз дифракция – нелинейное распространение света, всё не так просто.

Уточнённый интеграл:

$$E(P) = \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{e^{ikr}}{r} K(\varphi) dS$$

Ну ещё, вообще говоря, нужно домножить на константу  $C$ , зависящую от мощности источника:

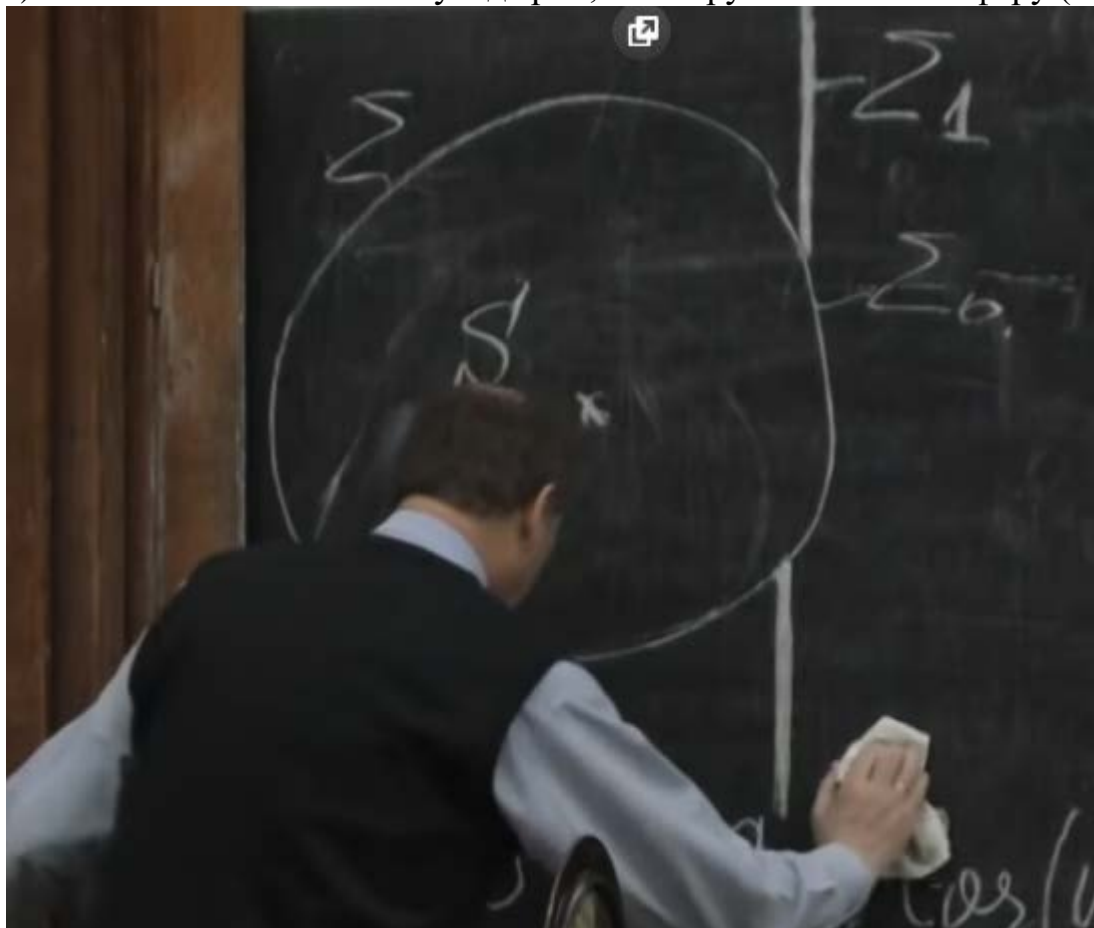
$$E(P) = \int_{\Sigma} C \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{e^{ikr}}{r} K(\varphi) dS$$

Это и есть дифракционный интеграл Френеля.

Пока отложив вопрос про то, какой же точный вид имеет  $K(\varphi)$ , обсудим два свойства интеграла Френеля:

1) Коммутативность:  $\rho_0$  и  $\rho_1$  коммутируют, то есть не важно:  $P$  – точка наблюдения, или наоборот, там у нас источник света, а там, где он раньше был, мы теперь наблюдаем – результат будет один и тот же.

2) Если мы поставим стенку с дырой, в которую «впишем» сферу (см. рис)



Тогда, оказывается, амплитуда на поверхностях  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$

$$\begin{cases} A_{\Sigma_0} = A_M \\ A_{\Sigma_1} = 0 \end{cases}$$

По существу это условие непрозрачности стенки ☺ Но вот Русаков его решил отдельно выделить.

Френель так и не смог найти  $K(\varphi)$ .

Эту проблему решил позже Кирхгоф, выпустив апгрейд - дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа. Точнее, он разработал достаточно сложную математическую теорию непрямолинейного распространения волн с блекджеком и лапласианом (она даже немного кванты напоминает). Русаков её рассказывает, Алешкевич тоже, она дофига сложная. Но вот следствие из него – дифракционный интеграл Кирхгофа: Оказывается, что

$$U(P) = \iint_{\Sigma} \frac{C e^{-ik(\rho_1 + \rho)}}{\rho_1 \rho} \frac{i}{2\lambda} [\cos \varphi_1 + \cos \varphi] d\sigma.$$

Где

$\varphi, \varphi_1$  — углы между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{n}$  соответственно.

Если сравним с формулой интеграла Френеля, то увидим, что они совпадут, если в интеграле Френеля положить

$$K(\varphi) = \frac{i}{2\lambda} [1 + \cos \varphi],$$

А  $\cos \varphi_1 = 1$ , т.к. волна сферическая.

Отдельно прокомментируем размерность  $K(\varphi) - \text{м}^{-1}$ .

Обратите внимание, что  $K$  всегда неотрицательна. Даже синяя точка (см. начало методички) вносит вклад в напряжённость в точке  $P$ , хотя, казалось бы, соответствующая волна движется вообще в другую сторону. И лишь одна, фиолетовая точка, действительно ничего не вносит.

У вас возникает логичный вопрос: что за бред? Как луч, шедший в одну сторону, может развернуться, да ещё более на 90 градусов и прийти в конечную точку? Да и с чего вообще лучам распространяться не прямо?

Ответ на этот вопрос есть в методе «Почему происходит дифракция».

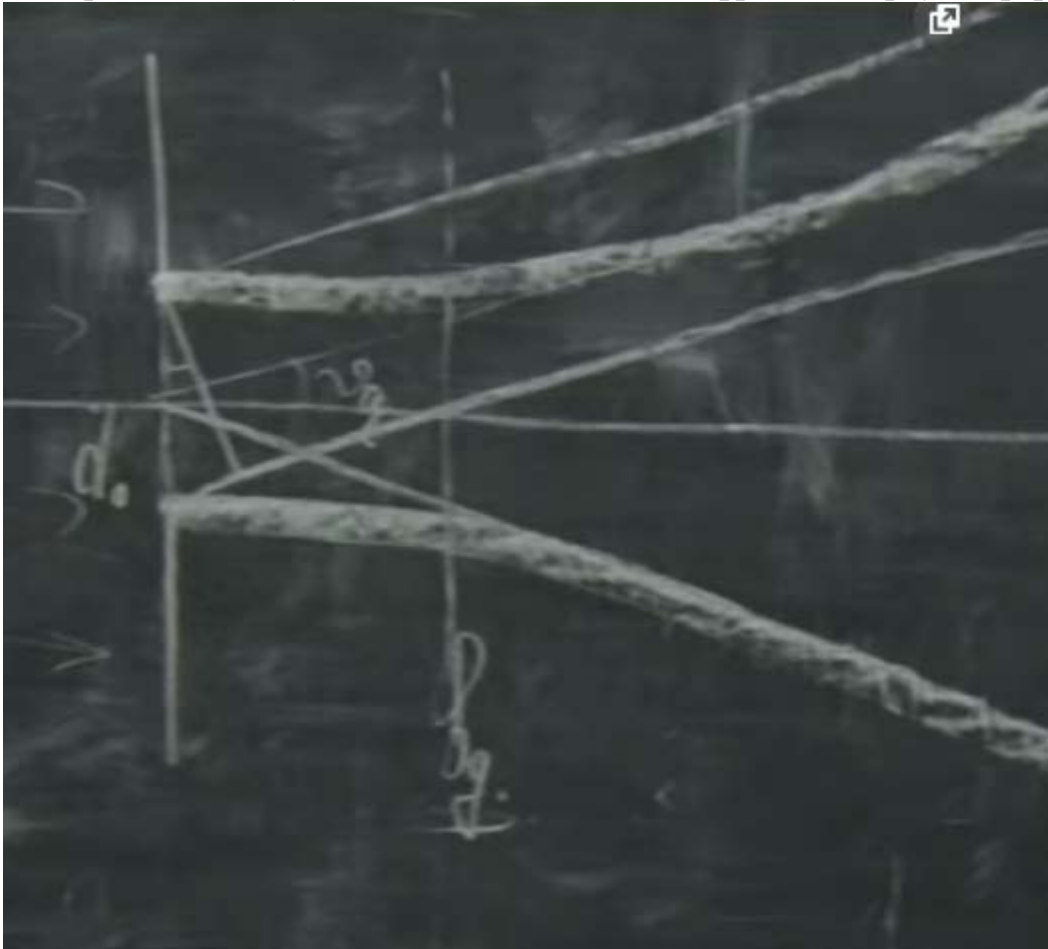
Оказывается, что интеграл Кирхгофа, как правило, аналитически не считается. Поэтому физики ввели три приближения:

1) вблизи объекта – зона геометрической оптики

$$b_f = \frac{r_0^2}{\lambda}$$

2) на расстояниях порядка  $b_f$  – так называемой дифракционной длины пучка  $b_f$  – это дифракция Френеля, нужно применять зоны Френеля

3) на расстояниях существенно больше  $b_f$  – дифракция Фраунгофера.



Вблизи отверстия лучи продолжают идти прямо – геометрическая оптика.

Вдали они отклоняются, и асимптотически ведут себя, как прямые – дифракция Фраунгофера.

В середине – чёт сложное, это дифракция Френеля.

Особенно интересен, как правило, случай Фраунгофера. Во-первых, экран-наблюдатель насколько далеко от экрана, что мы можем пренебречь расстоянием, которые проходят лучи перпендикулярно дырке до отклонения.

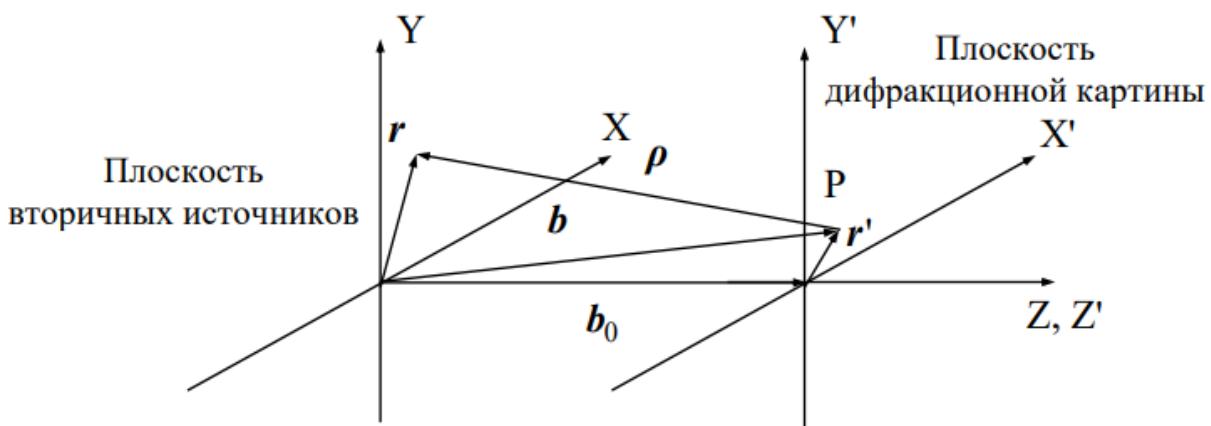
Кстати, давайте оценим дифракционную длину пучка. Вот мы взяли лист бумаги, сделали в нём отверстие радиусом, ну, скажем, полсантиметра и диаметром сантиметр (с палец примерно). Запустили в него, скажем, свет на 500 нм. Считаем:  $5 \text{ мм} * 5 \text{ мм} / 0,5 \text{ мкм} = 25 \text{ мм}^2 / 0,5 \text{ мкм} = 50 \text{ мм}^2/\text{мкм} = 50 \text{ километров}$ . А до этого

расстояния выполняется геометрическая оптика. Ну, неудивительно, что в обычных условиях дифракцию мы не видим: для неё нужны маленькие дырки!  
Кстати, дифракционная длина пучка равна первому радиусу Френеля. Ну, чтоб вы знали.

В случае дифракции Фраунгофера (то есть дифракции в дальней зоне) дифракционный интеграл преобразуется как

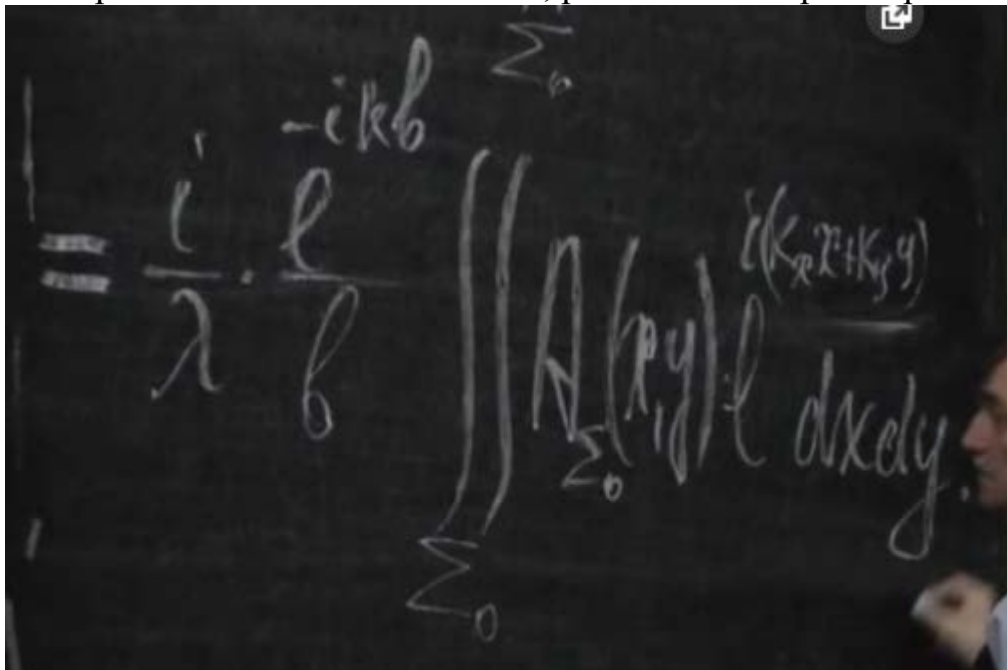
$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{b}} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik \cdot \mathbf{r}} d\sigma.$$

(определения  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  – см. рисунок)



$b$  – как видите – расстояние от точки наблюдения до дырки. Так как дифракция Фраунгофера, то мы находимся далеко от дырки, следовательно,  $b$  практически не зависит от того, какую точку дырки взять.

Интеграл можно записать и иначе, расписав скалярное произведение:



Именно последней формулой и будем пользоваться.



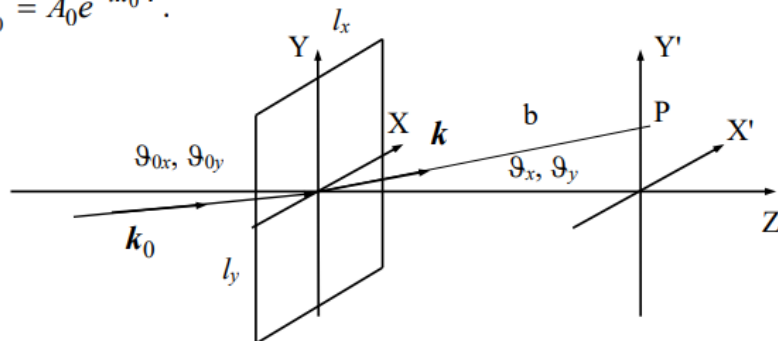
## Дифракция Фраунгофера на пространственных структурах (билет 21).

Прямоугольное отверстие:

### Дифракция на прямоугольном отверстии

Плоская монохроматическая световая волна на поверхности  $\Sigma_0$ :

$$A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-ik_0 \cdot r}.$$



$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_0 e^{-ik_0 \cdot r} e^{ik \cdot r} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \iint_{\Sigma_0} e^{i(k-k_0) \cdot r} d\sigma =$$

$$= \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{i(k_x - k_{0x})x} dx \int_{-l_y/2}^{l_y/2} e^{i(k_y - k_{0y})y} dy;$$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 l_x l_y \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l_x\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y - k_{0y}}{2} l_y\right),$$

$$I(P) = \frac{1}{2} |A(P)|^2 = I_0 \left(\frac{l_x l_y}{\lambda b}\right)^2 \operatorname{sinc}^2 \xi_x^l \operatorname{sinc}^2 \xi_y^l, \quad \xi_{x,y}^l \equiv \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} l_{x,y}.$$

Смотрите, что произошло:

Обратите внимание, что в ответе у нас остались  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_{0x}$ ,  $k_{0y}$ , но на самом деле ответ зависит лишь от  $k_{0x}$ ,  $k_{0y}$ , потому что  $k_x$ ,  $k_y$  (то есть вектор  $\mathbf{k}$  после прохождения отверстия) однозначно определяется начальным вектором  $\mathbf{k}_0$ ). Таким образом, задача о нахождении интенсивности на экране разбивается на две:

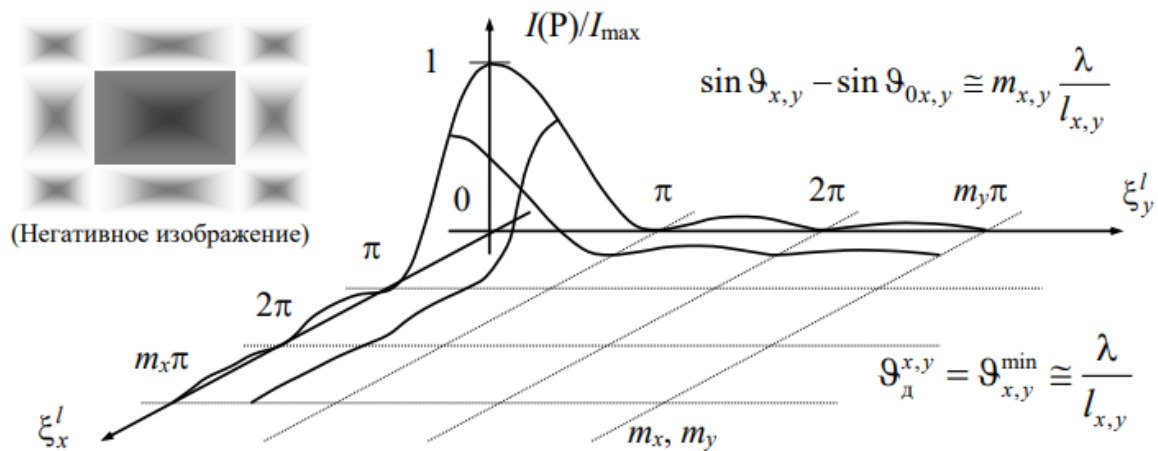
Первая – нахождение вектора  $\mathbf{k}$ , зная  $\mathbf{k}_0$  (по сути – найти угол преломления)

Вторая – взятие интеграла.

Вторая была решена, а первую не решают ни Алешкевич, ни Русаков. Так что нам придётся считать  $\mathbf{k}$  известным.

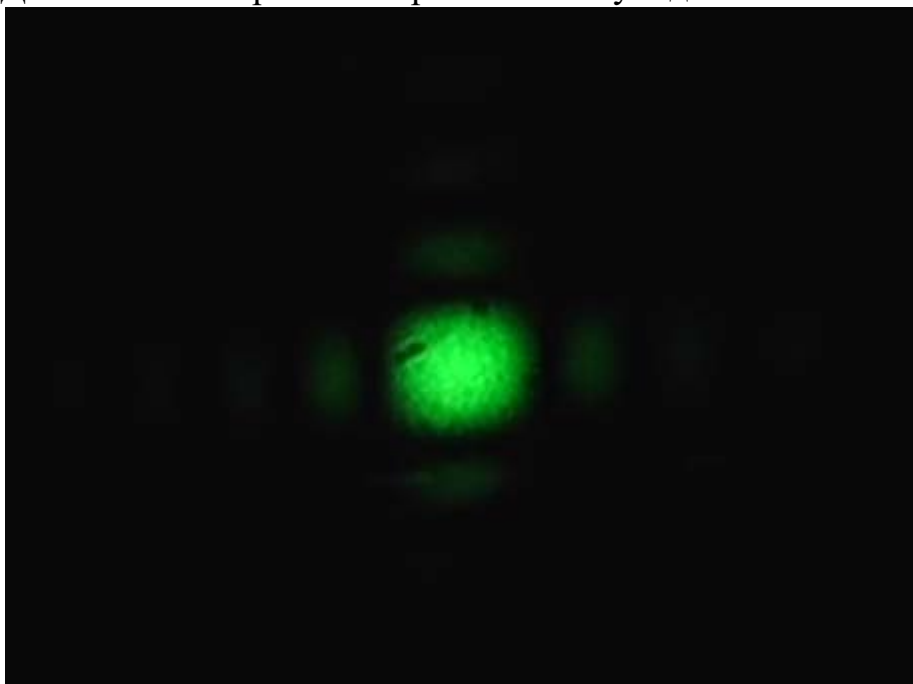
Давайте взглянем на конечный результат:

Минимумы интенсивности при  $\xi_{x,y}^l \equiv \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} l_{x,y} = m_{x,y} \pi$ ,  
 $m_{x,y} = 1, 2, 3, \dots$  – **порядок дифракции** вдоль оси X (Y).

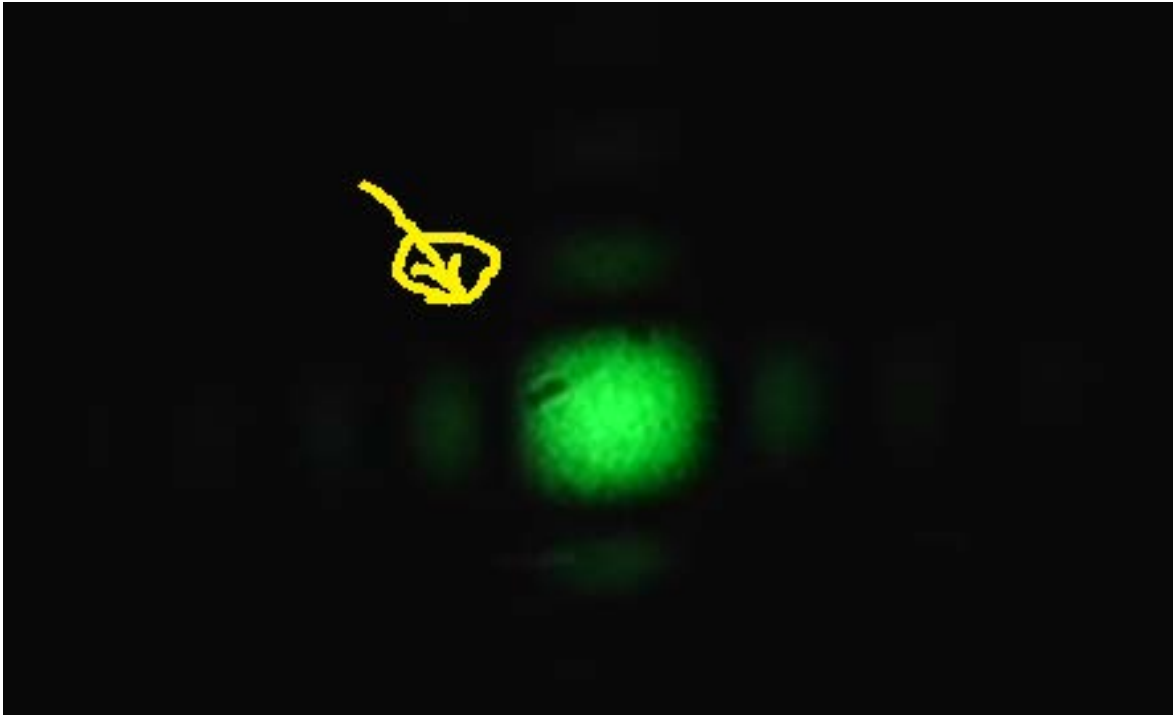


В центре будет максимум, а далее если мы пойдём вдоль одной оси – синк, вдоль другой – синк, ну а если пройдем между – их произведение.

Давайте посмотрим эксперимент. Мы увидим это:

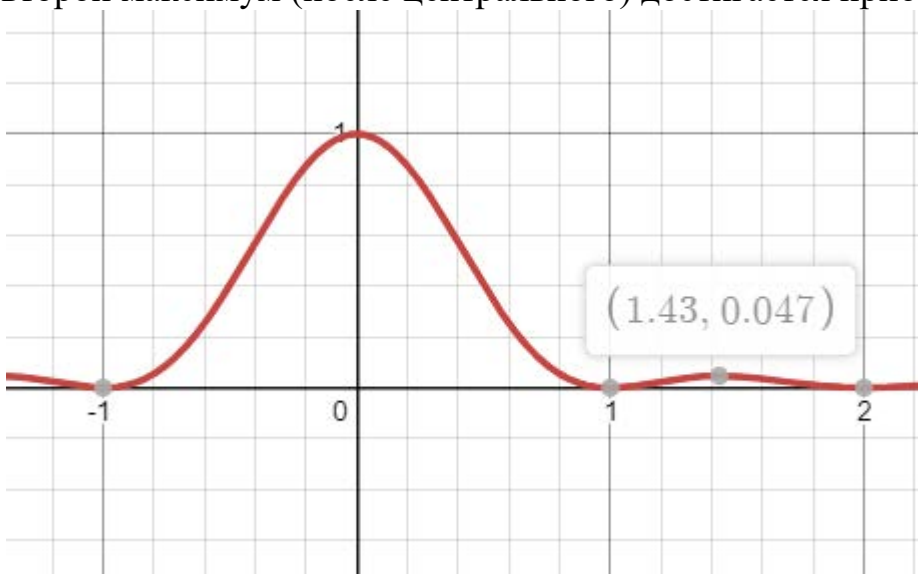


Ну, как и предполагали: центральное пятно, и затухающие пятна вдоль осей. Может возникнуть вопрос, почему нет пятен не на осях, где-нибудь вот тут:



Ответ на этот вопрос нам дадут подсчёты.

Исходя из нашего графика, это должна быть точка, где квадрат синка достигает максимума второй раз после нуля. Это не  $(3\pi/2; 3\pi/2)$ , как может показаться на первый взгляд – построив график квадрата синка в том же Десмосе, вы увидите, что второй максимум (после центрального) достигается приблизительно в  $1,43\pi$ .



(ось абсцисс сжата в пи раз).

А значение максимума -

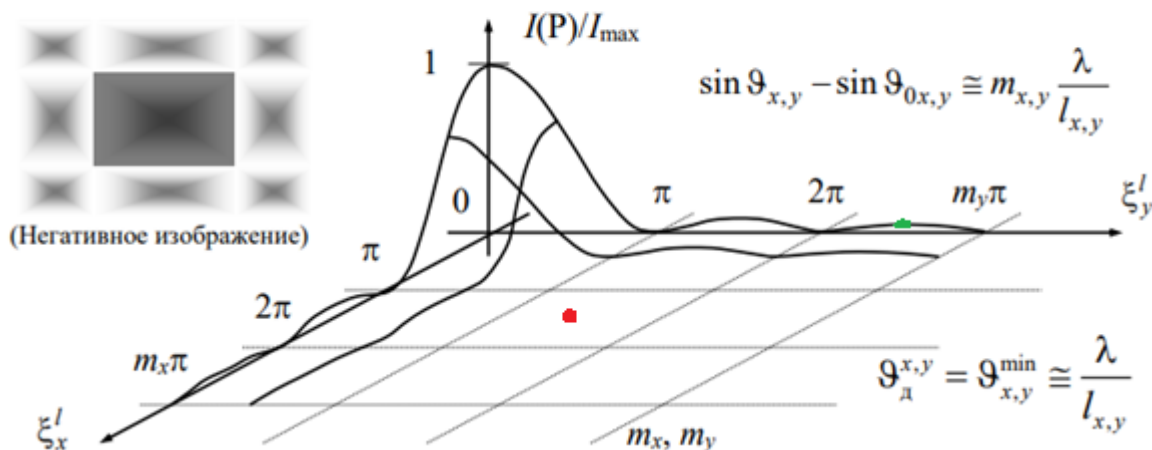
$$\left( \frac{\sin 1.43\pi}{1.43\pi} \right)^2$$

$$= 0.0471904082326$$

Так как интенсивность – это произведение квадратов синков, то возводя в квадрат эту величину, получим около 0,0022.

Это мы подсчитали красную точку, а теперь подсчитаем зелёную:

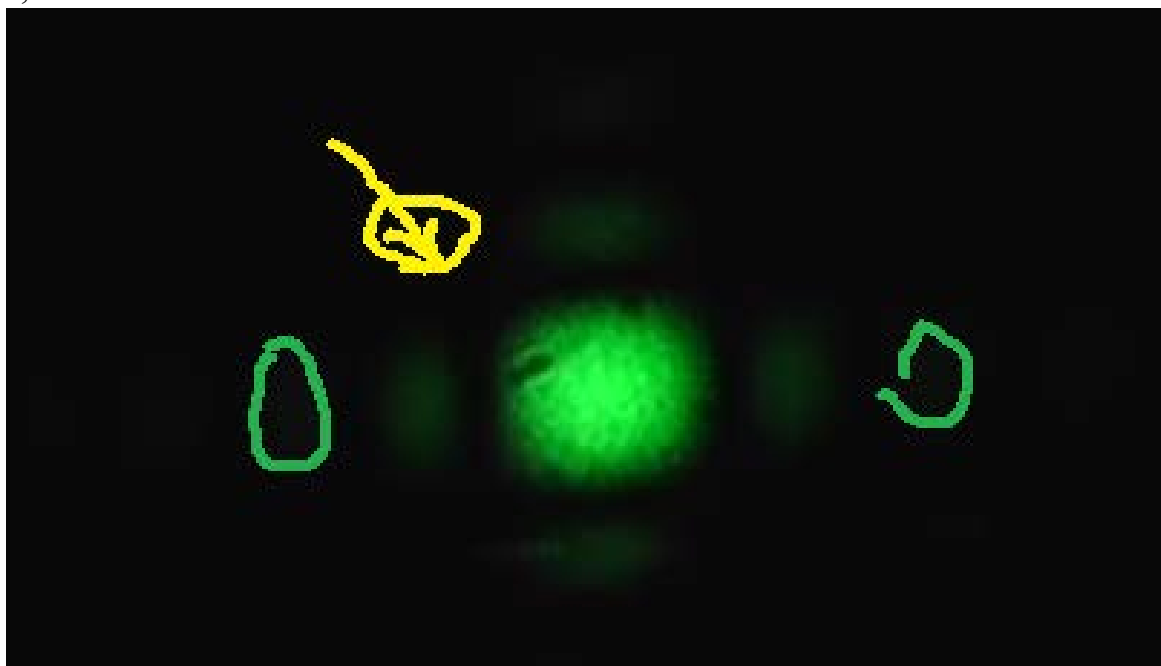
Минимумы интенсивности при  $\xi_{x,y}^l \equiv \frac{\kappa_{x,y} - \kappa_{0x,y}}{2} l_{x,y} = m_{x,y} \pi$ ,  
 $m_{x,y} = 1, 2, 3, \dots$  – порядок дифракции вдоль оси X (Y).



Она имеет координаты (2,459π, 0).

В ней значение квадрата синка, как можно убедиться подстановкой, равно 0,016, но домножается оно на второй синк, который равен единице. В итоге получаем 0,016, т.е. в семь раз больше, чем в красной точке.

А мы и зелёные точки фигово видим (обведены кружками). В них интенсивность 0,016 от максимальной!



А уж красную (отмечена жёлтым кружком со стрелкой) – и подавно, в ней вообще 0,002 от максимальной. Так что дифракционная картина, как вы понимаете, быстро тухнет, и видно лишь несколько пятен на осях.

Размеры пятен, разумеется, можно регулировать, меняя размеры прямоугольного отверстия.

Дифракцию на круглом отверстии так подробно разбирать не будем, приведём лишь конечный результат:

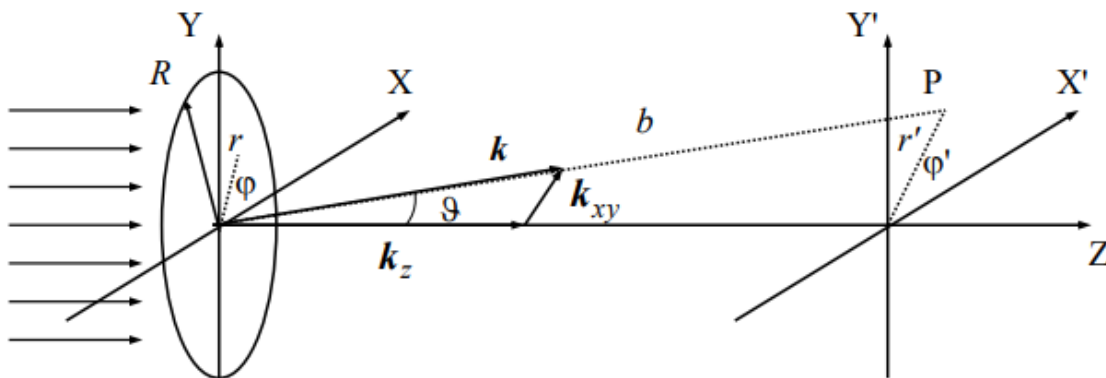
Плоская монохроматическая световая волна падает нормально поверхности  $\Sigma_0$ :

$$A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-ik_0 \cdot r} = A_0.$$

В полярных координатах:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad x' = r' \cos \varphi', \quad y' = r' \sin \varphi';$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k}_z + \mathbf{k}_{xy}) \cdot \mathbf{r} = k_{xy} r \cdot \cos(\varphi - \varphi').$$



$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik \cdot r} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{ik_{xy} r \cos(\varphi - \varphi')} r dr d\varphi = \\ &= \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \frac{2\pi R}{k_{xy}} J_1(k_{xy} R) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \pi R^2 \frac{2J_1(\xi)}{\xi} = A(\xi), \end{aligned}$$

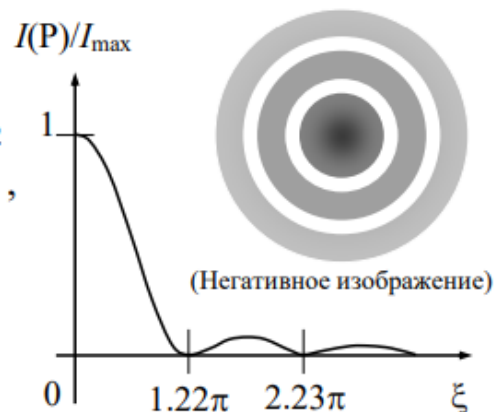
где:  $J_1(\xi)$  – функция Бесселя первого порядка,

$$\xi \equiv k_{xy} R = kR \sin \vartheta = \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \vartheta.$$

$$I(\xi) = \frac{1}{2} |A(\xi)|^2 = I_0 \left( \frac{\pi R^2}{\lambda b} \right)^2 \left( \frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right)^2,$$

$$\xi_{\min} = kR \sin \vartheta_{\min} \cong 1.22\pi,$$

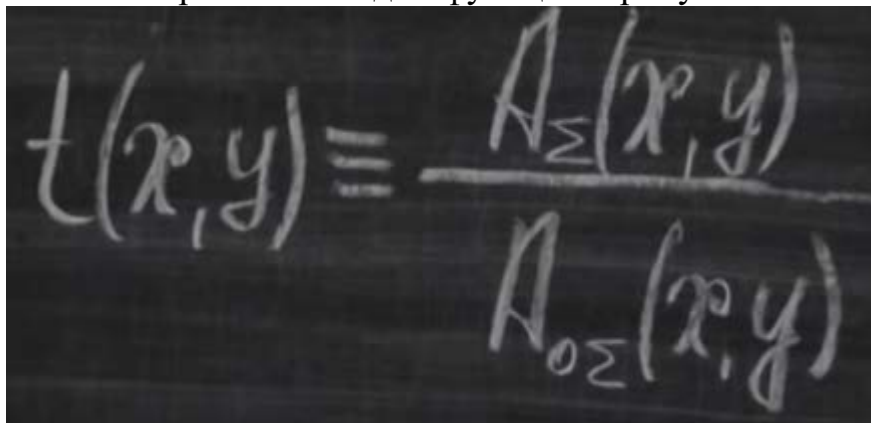
$$\vartheta_d = \vartheta_{\min} \cong 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$



Круги, которые мы видим, называются кругами Эйри. Мы к ним ещё вернёмся, когда будем говорить про телескопы.

Если я не ошибаюсь, ни прямоугольного, ни круглого отверстий в билетах нет, так что запоминать это говно необязательно. Зато там есть нечто похуже – дифракционные решётки, к которым мы и сейчас перейдём. Знесть нарастает.

Начнём с простого: введём функцию пропускания  $t$  как


$$t(x, y) = \frac{A_{\Sigma}(x, y)}{A_{0\Sigma}(x, y)}$$

Где  $A$  и  $A_0$  – амплитуда света после диффрорешётки и до:



Заметим, что  $t$  – не коэффициент-константа, а функция двух координат. Скажем, для самой простой решётки это

$$\text{Функция пропускания} - t(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ 0 & \text{при } l < x < d. \end{cases}$$

В билетах, однако, значится, комплексная функция пропускания. Это значит, что помимо изменения амплитуды, можем с помощью домножения на мнимую экспоненту запихнуть в  $t$  ещё и изменение фазы:

$$\tilde{t}(x, y) = \frac{A_{\text{после}}}{A_{\text{до}}} (x, y) e^{i \varphi(x, y)}$$

Где  $\varphi$  – сдвиг по фазе, возникающий после прохождения решётки. У вас может возникнуть вопрос: а как, чёрт подери, обычная дифракционная решётка может менять фазу, да ещё в разных точках по-разному? Да очень просто: представьте себе решётку переменной толщины. Ну типа такой:



Очевидно, за счёт неединичного показателя преломления разность фаз будет зависеть от того, в какую точку решётки попадёт свет.

Амплитудные решётки пропускают НЕ весь свет, но не меняют фазу:

$$|t(x, y)| \neq 1.$$

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Фазовые, наоборот, пропускают весь свет, но меняют фазы:

$$|t(x, y)| = 1.$$

$$\phi(x, y) \neq 0.$$

Амплитудно-фазовые отрываются по полной: они и не весь свет пропускают, и фазу меняют:

$$|t(x, y)| \neq 1$$

$$\phi(x, y) \neq 0.$$

В билетах эта классификация есть, так что её запоминаем.

Опуская все выкладки, получим

$$I(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} |A(\mathcal{D})|^2 = I_1(k_x, k_{0x}) H(N, \xi_x^d)$$

$$H(N, \xi_x^d) = \frac{\sin^2(N \xi_x^d)}{\sin^2(\xi_x^d)}$$

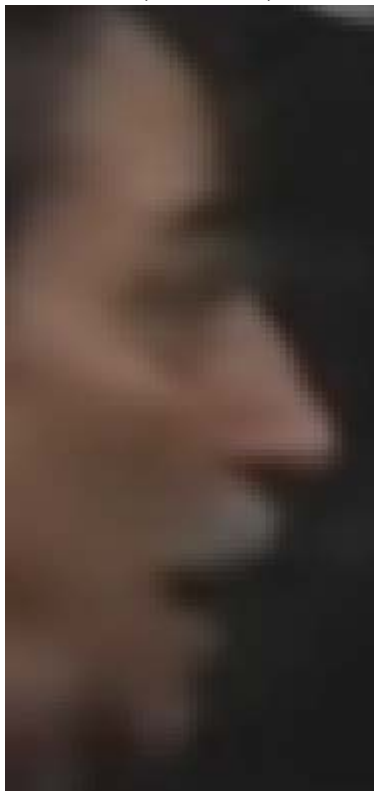


Где величина кси равна

$$\xi = \frac{k p d}{2} = \frac{k d}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$$

$$p = \sin \varphi_0 - \sin \varphi$$

А можно, кстати, левый край фотки увеличить?



Вот это моё выражение лица, когда я пытаюсь понять дифракцию.

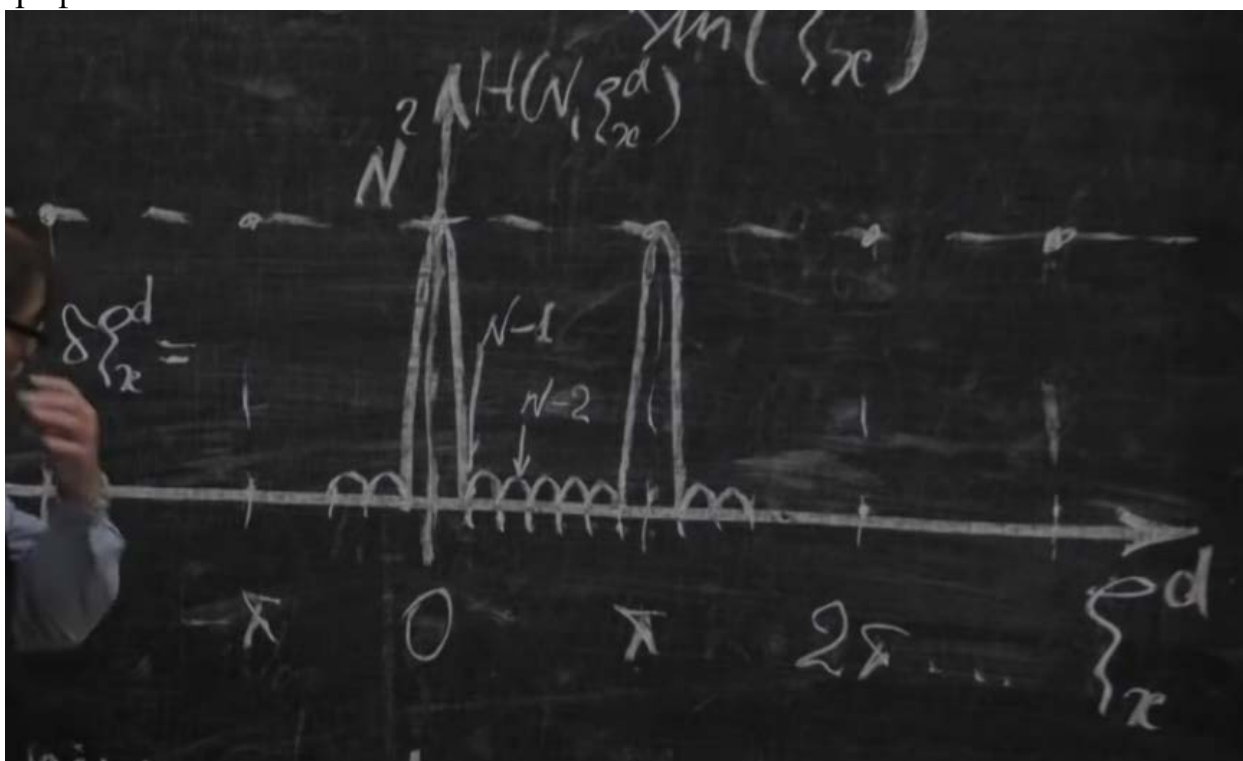
Функция Н называется функцией Лауэ.

Ударение ставится на первый слог, хотя нам, с российской блатной романтикой, конечно, ближе ударение на последний слог.

Займёмся анализом функции Лауэ:

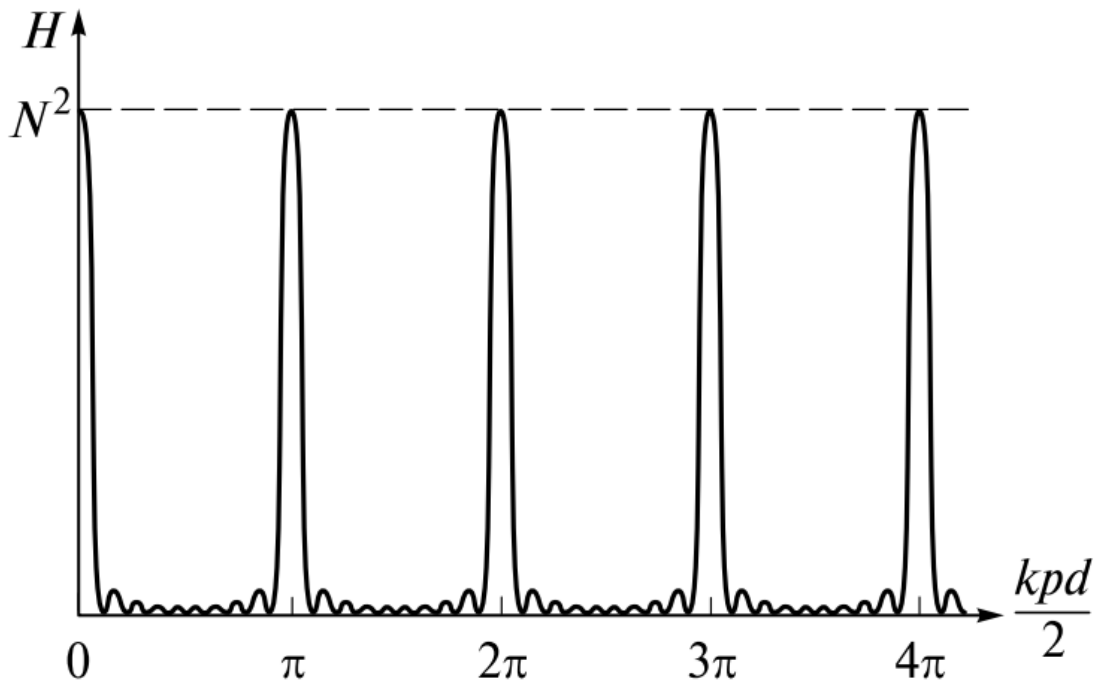
$$H(N, \sum_x^d) = \frac{\sin^2(N \sum_x^d)}{\sin^2(\sum_x^d)}$$

$N$  – напомню, число дырок. Сперва, не задумываясь, что такое кси, нарисуем график  $H$  от кси:



Как несложно понять, максимум будет, когда аргумент кратен  $\pi$ . Тогда числитель и знаменатель стремятся к нулю, и применяя равенство  $\sin x$  приблизительно  $= x$ , когда синус стремится к нулю, получаем  $N^2$ .

<https://www.desmos.com/calculator/s2oxaue1gr> - график в Десмосе для  $N^2=10$ .



- тот же график из учебника Алешкевича.

Условие максимума, т.е. кратность кси  $\pi$  -  $\frac{kpd}{2} = m\pi$ , можно расписав иначе, расписав волновой вектор через длину волны. Тогда получим:

$$d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = m\lambda,$$

Наверняка оно многим знакомо именно в таком виде.

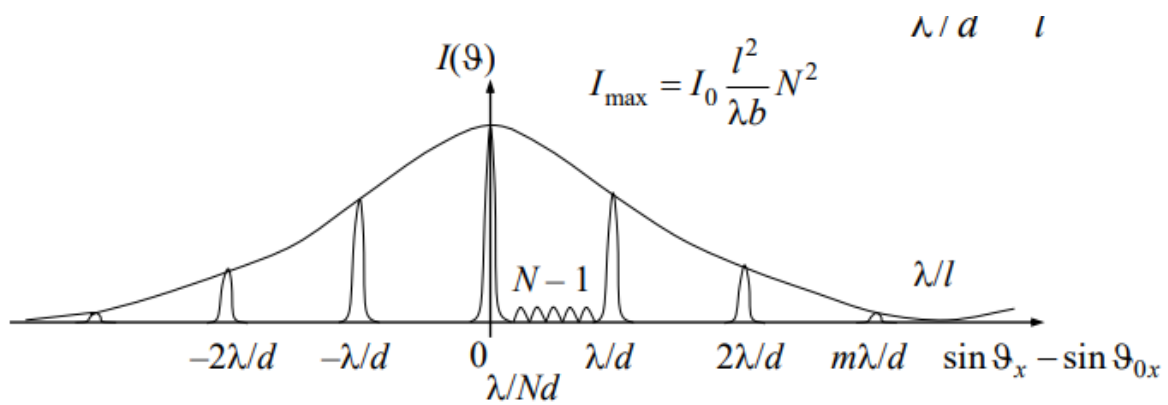
А минимумы образуются... а ну не спешите подставлять вместо полуцелого  $m$  - полуцелое  $m+1/2$ . Минимумов (нулей интенсивности) гораздо больше, чем максимумов - посмотри на график.

Минимумы на самом деле - это когда числитель  $N$  в zero обращается, то бишь

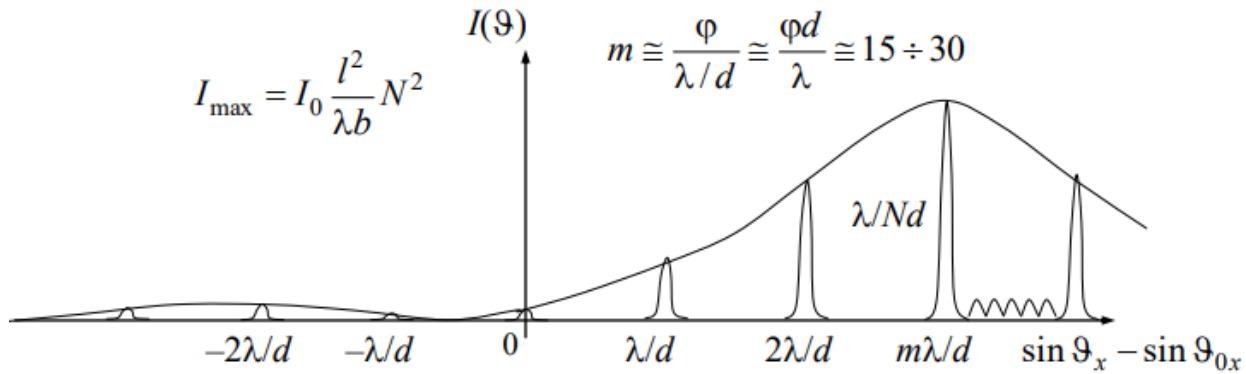
$$\frac{kpdN}{2} = n\pi, \text{ или } Nd(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = n\lambda,$$

Это была одна щель. А у нас их много! Они все будут... интерферировать. Так что формулу Лауэ надо домножить на синк, который вылезет из интерференции.

И график:



Это для амплитудной решётки! А для фазовой он окажется сдвинут:



Собственно, все решётки, с которыми имели дело до этого, в том числе на 136 праке – амплитудные. У них картина симметрична:

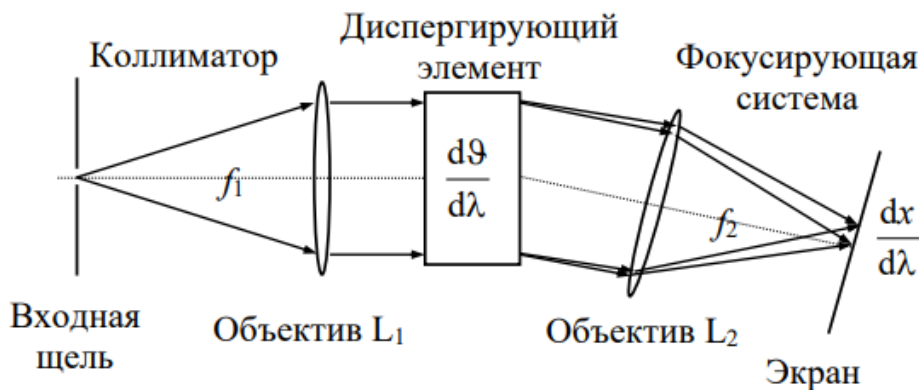


Рис. 13.1. Дифракция пучка белого света на амплитудной дифракционной решетке

Прежде чем перейдём к пространственному преобразованию Фурье, Аббе и прочему говну, давайте передохнём и разберём тему попроще.

### Спектральные приборы (билет 22)

**Спектральный прибор** – оптический прибор для пространственного разложения светового поля на монохроматические составляющие (в частотный спектр) с помощью угловой дисперсии.



Чем он характеризуется?

**Аппаратная функция  $I(P)$**  – "отклик" прибора на монохроматическое излучение – регистрируемая интенсивность светового поля в зависимости от обобщенной координаты точки наблюдения  $P$ .

Определение кажется сложным и пахнет теоремехом. На самом деле речь просто по то, что мы видим на экране: зависимость интенсивности там от координаты. Или, для некоторых спектральных приборов, угла. Это и есть обобщённая координата.

**Область свободной дисперсии, дисперсионная область  $\Delta\lambda$**  – максимальный интервал длин волн, при котором возможна работа прибора (получение разрешенной дифракционной или интерференционной картины). Максимальный интервал длин волн, исследуемый спектральным прибором.

Достаточно неудачное как по мне название для такого простого понятия, как интервал, в котором спектральный прибор может корректно работать. Дело в том, что если исходный спектр очень широк, то возможно наложение максимумов в пространстве, соответствующим разным длинам волн, но и разным порядкам максимумов.

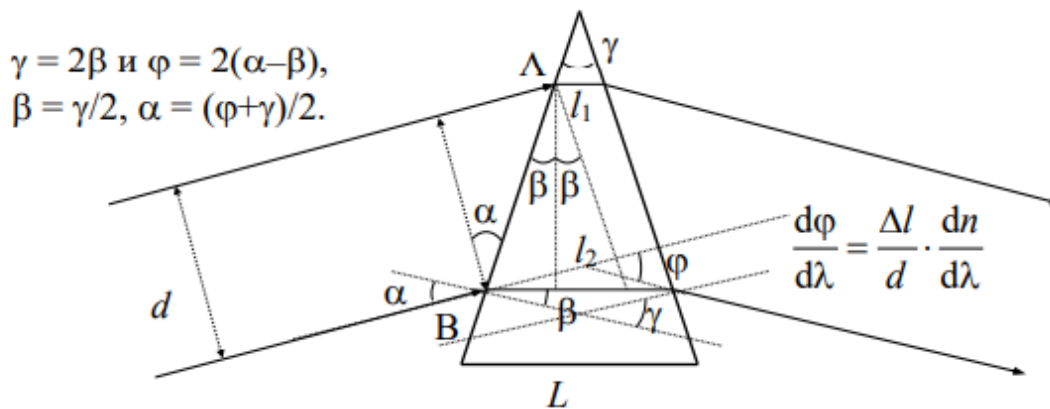
**Предел разрешения  $\delta\lambda$**  – минимальная разность длин волн двух спектральных линий, которые разрешает спектральный прибор.

Это должно быть хорошо знакомо по 408 праку: две узкие линии, которые, однако, на спектрометре не дельтафункции, а два пика. Если расстояние между ними меньше предела разрешения, линии сольются.

**Разрешающая способность (сила)  $R = \lambda/\delta\lambda$**  – отношение характерной длины волны  $\lambda$  исслед. излучения к пределу разрешения  $\delta\lambda$ . Безразмерная величина, показывающая, насколько спектрометр крут: чем меньше предел разрешения, тем больше  $R$ .

Все эти величины можно вычислить для различных спектральных приборов.  
Давайте я вам картинку покажу, а вы посмотрите?

### Призма ( $\gamma, L, dn/d\lambda$ )



$$\gamma = 2\beta \text{ и } \varphi = 2(\alpha - \beta),$$

$$\beta = \gamma/2, \alpha = (\varphi + \gamma)/2.$$

**Закон Снеллиуса:**  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin((\varphi + \gamma)/2)}{\sin(\gamma/2)} = n.$

$$\frac{\cos((\varphi + \gamma)/2)}{2 \sin(\gamma/2)} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda},$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{l_2 - l_1}{AB} \cdot \frac{AB}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

**Аппаратная функция** – интенсивность дифракц. картины от щели:

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{d^2}{\lambda b} \text{sinc}^2 \left( \frac{k \sin(\vartheta - \varphi)}{2} d \right).$$

**Условие главного максимума:**  $\frac{k \sin(\vartheta - \varphi)}{2} d = 0 \Rightarrow \vartheta = \varphi, \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda}.$

**Условие ближайшего минимума:**  $\frac{k \sin(\vartheta - \varphi)}{2} d = \pi \Rightarrow \vartheta \cong \varphi + \frac{\lambda}{d},$

сдвиг минимума относительно максимума –  $\delta\vartheta = \frac{\lambda}{d}.$

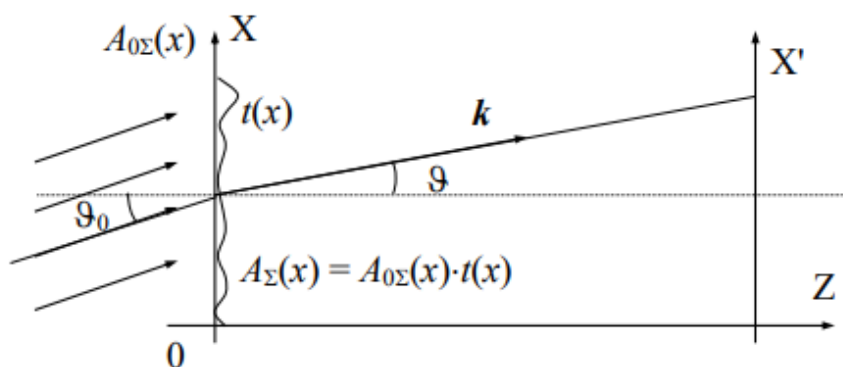
**Область свободной дисперсии:**  $\Delta\lambda \sim \infty.$

**Угловая дисперсия:**  $D_\vartheta \equiv \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$

**Предел разрешения:**  $\delta\lambda = \frac{\delta\vartheta}{|D_\vartheta|} = \frac{\lambda/d}{\frac{\Delta l}{d} \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|} = \frac{\lambda}{\Delta l \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|}.$

**Разрешающая способность:**  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \Delta l \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|; R_{\max} = L \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|.$

## Дифракционная решетка ( $d, N, m$ )



**Аппаратная функция** – интенсивность дифракц. картины от дифр. р.:

$$I(\vartheta) = I_1(\vartheta) \cdot H(N, \xi(\vartheta)),$$

$$H(N, \xi(\vartheta)) = \frac{\sin^2(N\xi(\vartheta))}{\sin^2 \xi(\vartheta)}, \quad \xi(\vartheta) = k \frac{\sin \vartheta - \sin \vartheta_0}{2} d = k \frac{\Delta(\vartheta)}{2},$$

$\Delta(\vartheta)$  – разность хода крайних лучей для одного периода решетки.

**Условие главных максимумов:**

$$\xi(\vartheta) = k \frac{\Delta(\vartheta)}{2} = m\pi, \quad \Delta(\vartheta) = d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = m\lambda.$$

**Условие ближайших минимумов:**  $\Delta(\vartheta) = d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$

**Порядок дифракции:**  $m = \frac{\Delta(\vartheta)}{\lambda} = \frac{d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0)}{\lambda}.$

**Область свободной дисперсии:**  $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$

**Предел разрешения:**  $m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm}.$

**Разрешающая способность:**  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm$  !,  $R_{\max} = Nm_{\max} = N \frac{d}{l} = \frac{L}{l}.$

**Угловая дисперсия:**  $D_{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \vartheta}.$

Oh shit, you should remember all this shit? Что из этого запомнить? Запомните лучше аппаратную функцию. Через неё выведете всё остальное, если приспичит. Собственно, на картинках так и сделано.

**Пространственное преобразование Фурье. Комплексная пространственная спектральная ко всем чертям амплитуда. Разложение пучка по плоским волнам. Основы дифракционной теории формирования изображений Аббе. Пространственная фильтрация изображения. Опыт Аббе-Портера (билеты 20, 23).**

По мнению автора – самая сложная область во всём семестровом курсе оптики. Впрочем, если в неё въехать, то она становится плюс-минус понятной. Но для этого нужно в неё въехать.



Ладно, это была ABBA здорового человека, но у нас она с Портером...



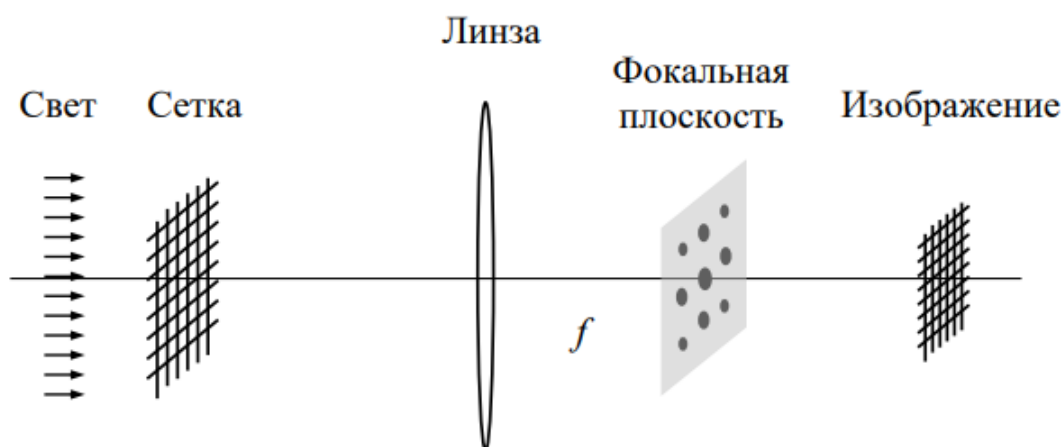


Не могу не рассказать смешную историю на этот счёт. Один турист, приехав в Лондон, пришёл просить «портер». Англа он, как обычный студент ФФ, не знал, но настойчиво просил официанта принести ему портер. Официант долго тупил, в итоге привёл к нему... грузчика. Дело в том, что porter по-английски – это портье, носильщик, грузчик, но не как известный сорт пиваса.

Автор не призывает бухать, помните, алкоголь вредит вашему здоровью. А оптика – вашей психике!

Давайте начнём с опыта Аббе-Портера. Да, это практически в чистом виде великий и ужасный 140-й прак.

## Схема опыта Аббе-Портера.



Коллиматорный (то есть параллельный пучок света) проходит через сетку. Далее он расходится, но собирающая линза (она для этого и создана) помогает собрать лучи вновь поближе к главной оптической оси. В фокусе они сходятся и мы видим... а что мы там видим? Позже вернёмся к этому вопросу, так что опыт этот не забываем.

Нам понадобится пространственное преобразование Фурье. Русаков и Алешкевич пишут 2626959 заумных нифига не понятных формул, не поясняя, что вообще происходит. Давайте поясним!

(замечание – внезапно очень хорошее объяснение пространственному преобразованию нашлось у Побединского -

<https://www.youtube.com/watch?v=8N0Bx8DMt6c>, начиная с 5:00. У него, правда, дискретное преобразование, но оно легко дополняется до непрерывного).

Мы уже знакомы с обычным, спектральным преобразованием Фурье: Мы от функции  $E(t)$ , функции времени, можем перейти к функции  $g(\omega)$  интегралом по  $t$ . Мы можем от функции  $g(\omega)$ , функции времени перейти к функции  $E(t)$ , интегралом по  $\omega$ . Ещё величины  $\omega$  и  $t$  имеют обратную размерность.

Если говорить о пространственном преобразовании Фурье, то мы поступаем похожим образом: от функции напряжённости в точке  $E(x, y)$  плоскости экрана переходим... к функции двух аргументов  $k_x$  и  $k_y$ . То есть мы сводим все процессы к распространению двух волн вдоль плоскости. Зная их, мы можем найти  $E(x, y)$  в любой точке плоскости. И наоборот: зная  $E(x, y)$  в любой точке, мы находим некую функцию  $F(k_x, k_y)$  – функция вероятности... Сложно?

Возможно, вам поможет аналогия с квантами. Дело в том, что волновую функцию традиционно представляют как функцию четырёх аргументов:

$$\Psi(x, y, z, t)$$

Так называемое координатное представление.

А есть ещё импульсное представление –

$$\Psi(p_x, p_y, p_z, t)$$

И квадрат пси уже будет обозначать не вероятность найти частицу в точке с координатами  $(x, y, z)$ , но ЛЮБЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ ИМПУЛЬСА, а вероятность того, что частица имеет проекции импульса  $p_x, p_y, p_z$ , а вот координаты уже какие придётся.

Тем самым, помимо традиционного пространства с  $x, y, z$ , рассматривают ещё импульсное пространство с  $p_x, p_y, p_z$ .

Здесь аналогично квантам.

Важный момент: НЕ надо думать, что в каждой точке  $k_x, k_y$ , они общие на всё пространство. Но это не два числа! Это... Представьте себе плоскость, проведите горизонтальную прямую – это  $k_x$  и вертикальную –  $k_y$ , и на этой плоскости определена функция вероятности  $F(k_x, k_y)$ , которая определяет «вклад» волны с проекциями волнового вектора  $k_x, k_y$ . Если волна будет самой простой – поляризованной монохроматической, то у нас будет, если так можно выразиться, двумерная дельта-функция – в одной точке плоскости функция равна бесконечности, а во всех других 0. Если у нас будет суперпозиция двух простых волн – то будет сумма двух двумерных дельта-функций. Понятное, что в дифракции такого изича и нет и у нас  $F$  будет иметь более сложный вид.

И только теперь можно дать формулы. Алешкевич обе функции обозначает как  $U_\Sigma$ , но вы помните – функция от  $x$  и  $y$  – это обычная напряжённость, а вот от  $k_x, k_y$  – функция вероятности.

$$U_\Sigma(k_x, k_y) = \iint_\Sigma U_\Sigma(x, y) e^{ik_x x + ik_y y} dx dy.$$

$$U_\Sigma(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint U_\Sigma(k_x, k_y) e^{-ik_x x - ik_y y} dk_x dk_y.$$

Ну вот теперь видно, что они похожи на спектральное преобразование Фурье – и там, и там мнимая экспонента, в одном из интов с плюсом, в другом с минусом. В спектральном преобразовании произведение коэфов перед интегралами было  $1/2\pi$ , здесь –  $1/(2\pi)^2$ , потому что здесь у нас два измерения!

А вот теперь уже можно будет понять, что такое Фурье-синтез. Представим себе, что у нас есть прибор, который каким-то образом (не важно, каким) зануляет волны со слишком большой проекцией волнового вектора на ось  $y$ .

До есть, если  $\text{abs}(k_y) < k_{\text{критич}}$ , такие волны продолжают распространяться и после прохождения прибора. А вот если  $\text{abs}(k_y) > k_{\text{критич}}$ , такие волны зануляются.

И когда мы вновь будем «собирать» поле после прохождения прибора по волновым векторам, у нас оно изменится из-за результата зануления каких-то

волн. В данном случае – если  $\text{abs}(k_y) > k_{\text{критич}}$ , но это самое условие может быть любым. Этот процесс «собирания» итоговой картины  $E(x,y)$  интегрирования по всем проекциям волнового вектора и называется Фурье-синтезом. В некотором роде Фурье-синтез можно сравнить с приготовлением блюда: здесь функция  $F(k_x, k_y)$  играет роль количество ингредиента – волны с проекциями волнового вектора  $k_x$  и  $k_y$ .

Кстати, эти проекции называются пространственные частоты. Запомните, это есть в билетах. Господи, какое же это говно. А я ещё на РЯКР жаловался.

Хорошо, а как всё же нам занулить какую-то область на плоскости  $k_x$  и  $k_y$ ?

Непонятно. Зато мы знаем, как легко занулить какую-то область на плоскости  $x$  и  $y$ : ставим там непрозрачный экран и всё – там, где не нужен свет не проходит.

Оказывается, что если мы вернёмся к опыту Аббе-Портера

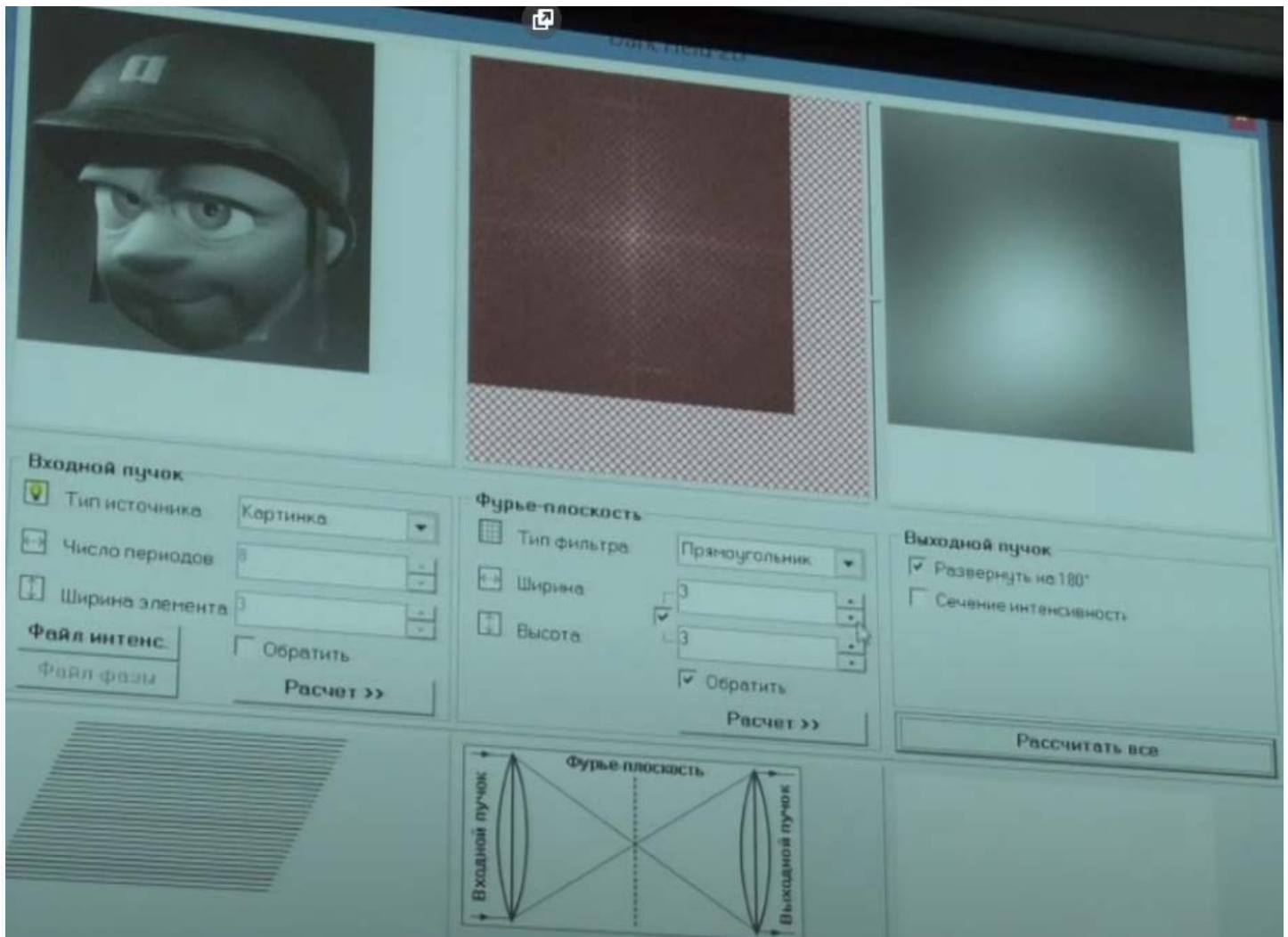


То значение интенсивности в фокальной плоскости каждой точке  $x$  и  $y$  будет прямо пропорционально...  $k_x$  и  $k_y$ . Вот это нам фортануло. Но это специфика именно фокальной плоскости, конечно.

Поставив, например, в фокальную плоскость круглое отверстие, получим, что у нас занулятся все волновые вектора модулем больше некоего.

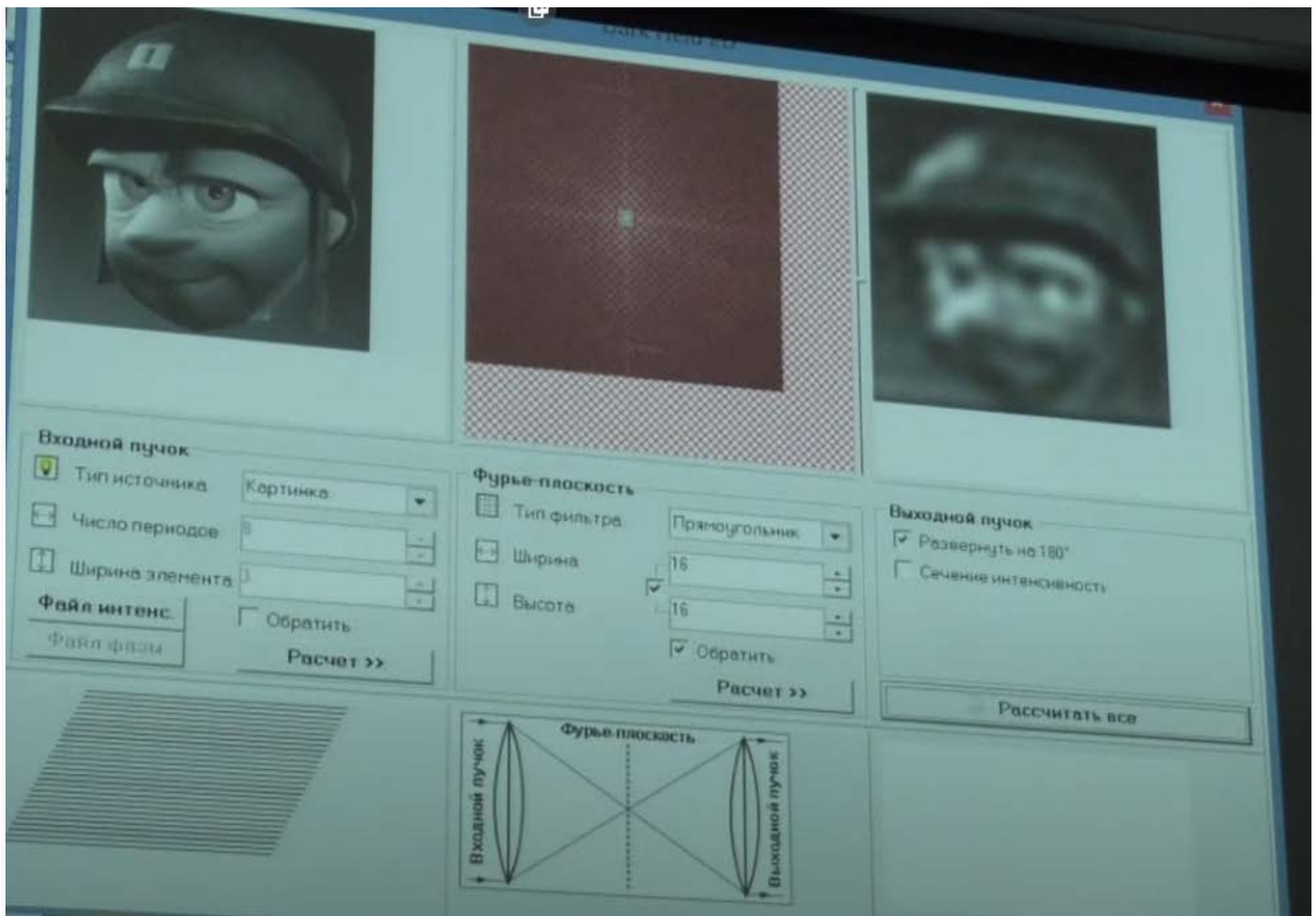
Поставив узкую щель – у нас занулятся все компоненты вектора  $k$  (то есть пространственные частоты), перпендикулярные ей, а вот параллельные спокойны выживут.

Давайте приведём пример. Пусть у нас вместо скучной сетки, вызывающей флешбеки с 140-го прака (отвратительное говно) изображение вот этого молодого человека:

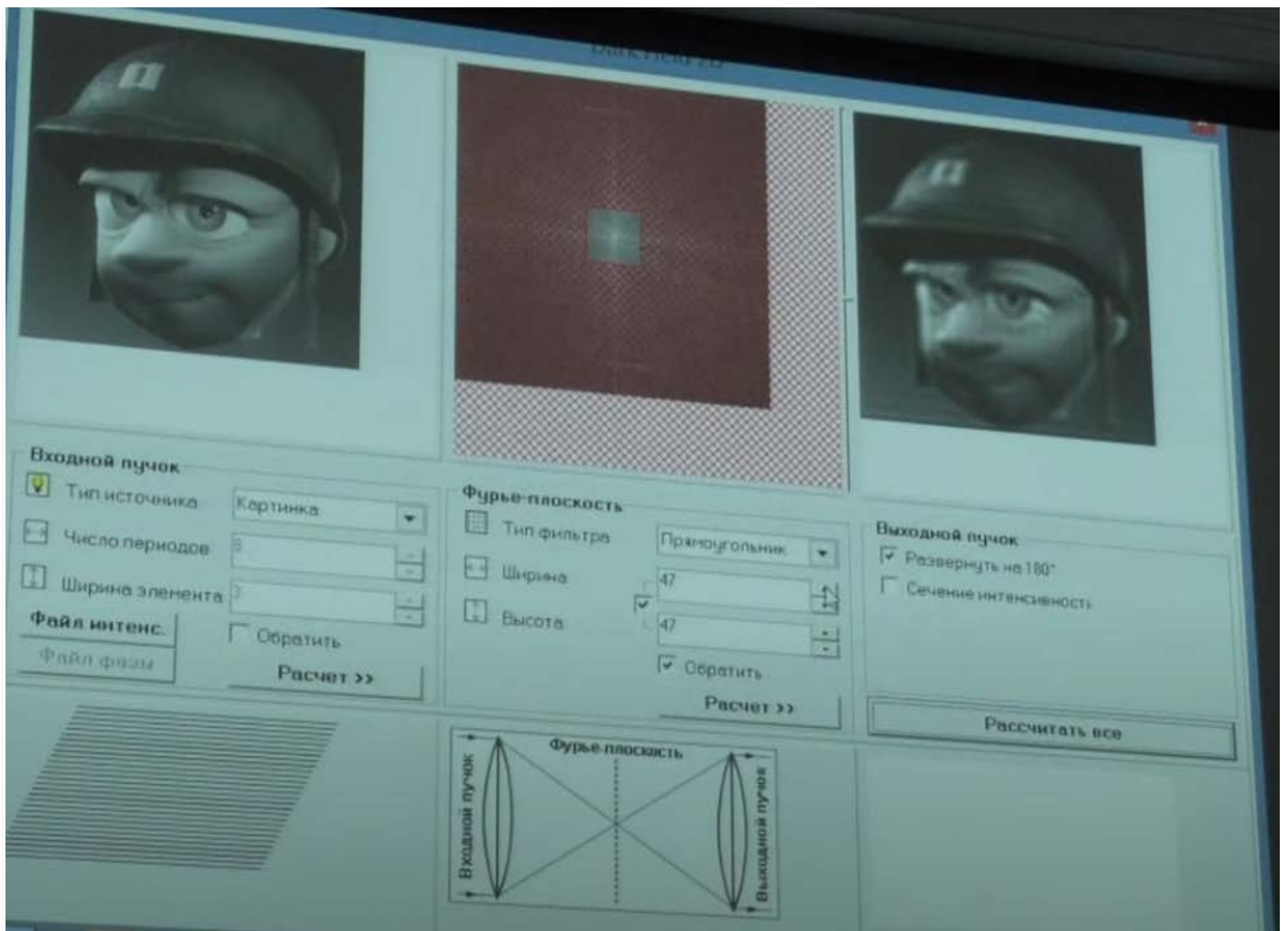


Если мы закроем все волны, у которых хоть одна пространственная частота больше 3, то мы получим очень хреновое изображение (см. выше)

Подрубаем более высокие пространственные частоты, до 16:



Качество пикчи однозначно повысилось. Повысим ещё, до 47:



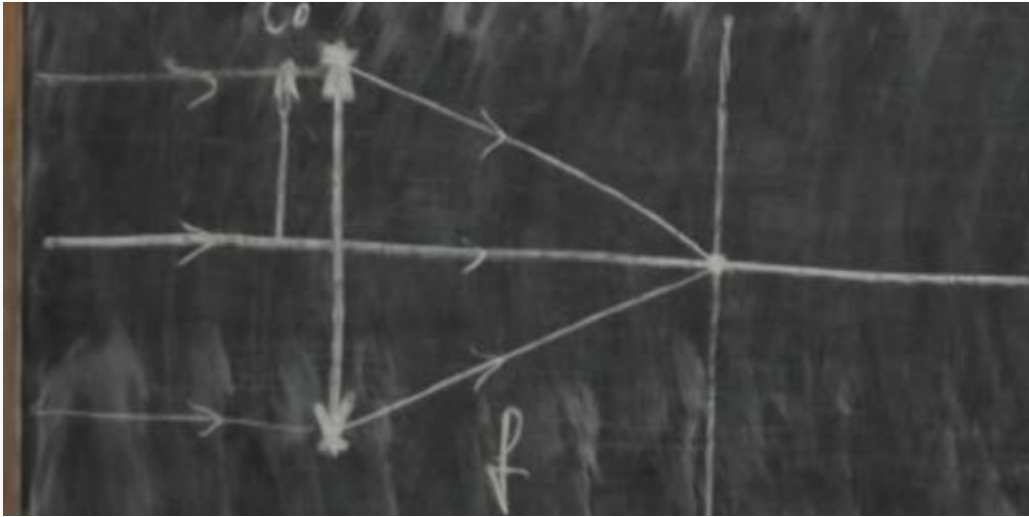
Ну так уже более-менее приемлемо. Ну а чтобы получить фул эйчди, то нужно уже максимально раздвинуть рамки прямоугольной дырки в фокальной плоскости. Как мы видим, более высокие пространственные частоты отвечают за детализацию изображения. В принципе это логично: модуль  $k$  обратно пропорционален  $\lambda$ , и для высокой детализации нам нужны маленькие длины волн.

Теперь давайте к билетам 24 и 25 перейдём, на последнем издыхании фактически.

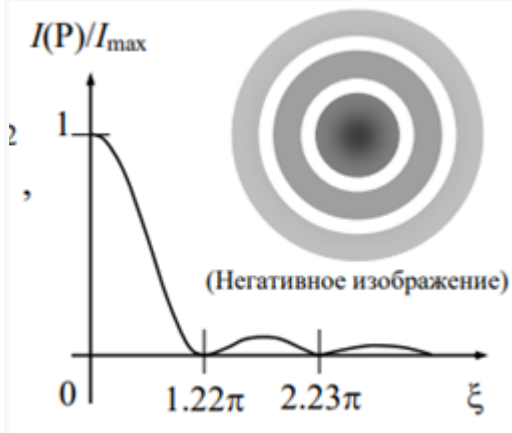
### **Микроскопы, телескопы, голограммы. Их предел разрешения и разрешающая способность.**

Начнём с телескопа. Это просто обычная собирающая линза, но вы тут сейчас поймёте, что она со своими приколами.

Свет от первой звезды пусть падает нормально.

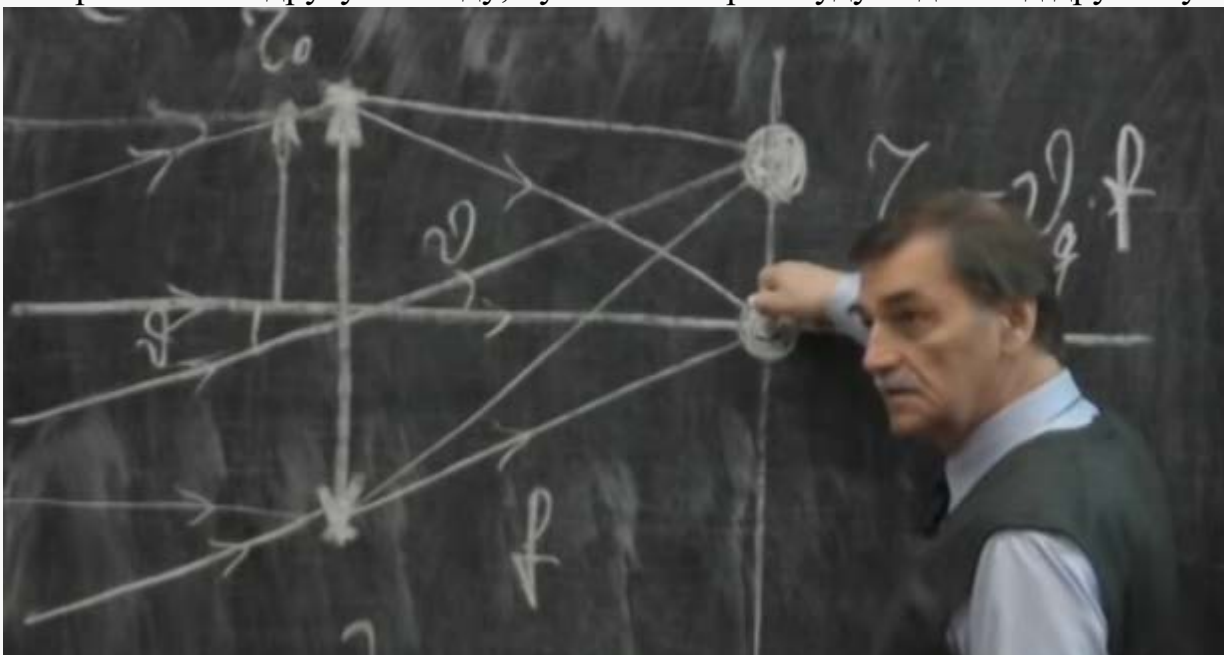


Тогда... мы увидим изображение в фокусе? Да, только оно будет не точечным, а там будет наблюдаться круги Эйри. Помните их?



Не спрашивайте, откуда они взялись! Вячеславу Серафимовичу виднее, он умный, а мы глупые.

Теперь возьмём другую звезду, лучи от которой будут идти под другим углом:



Они сойдутся в другой точке фокальной плоскости, и там тоже будут круги Эйри.



Мы сможем различить эти звёзды, если круги от двух звёзд не будут слишком близко:

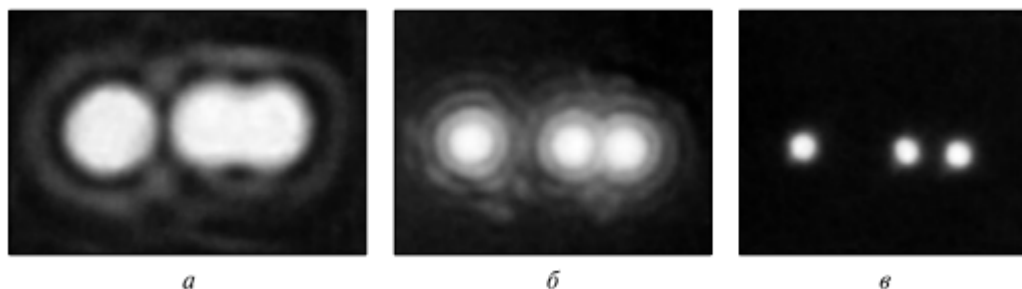


- здесь мы ещё можем различить звёзды.



- а здесь уже нет.

Вот чуть более реалистичные фотки из учебника Алешкевича:



На первых двух эти самые кольца даже видны.

Для этого надо оценить их радиус.

Угловой размер центрального будет

$$\vartheta_0 = \frac{0,61\lambda}{r_0}.$$

И оттуда можно вывести, что угол между звёздами должен был более

$$\vartheta \geq \vartheta_0 = \frac{0,61\lambda}{r_0}.$$

А разрешающая способность

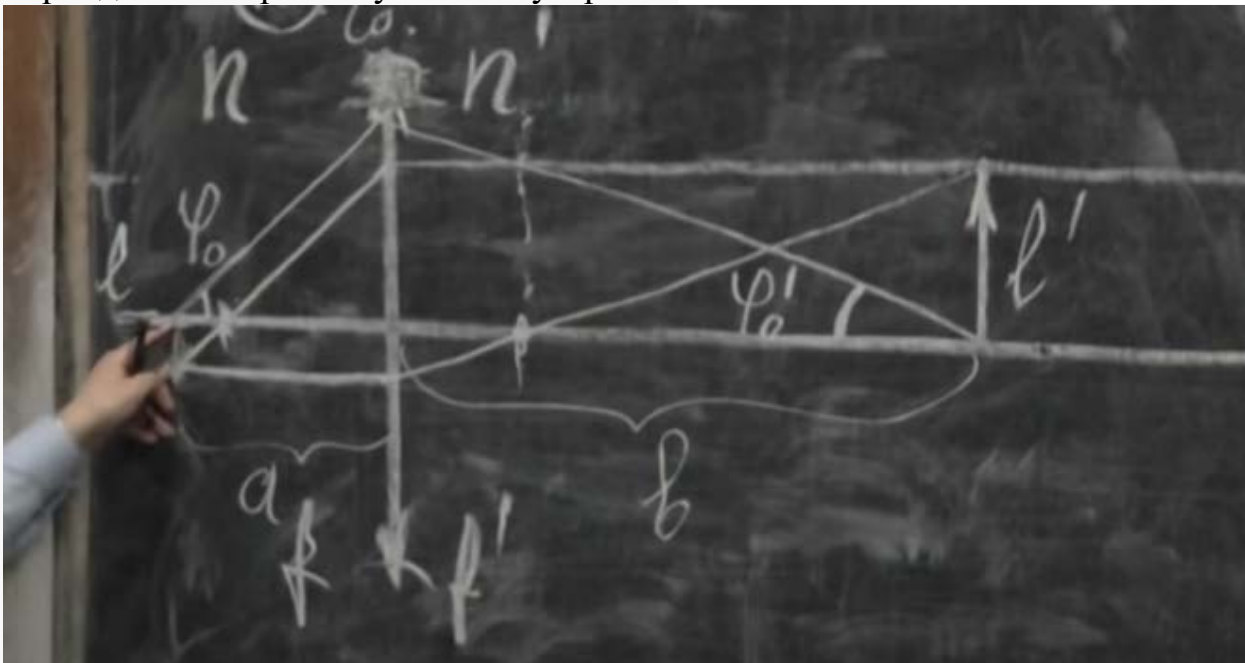
$$R = \frac{1}{\vartheta_0} = \frac{r_0}{0,61\lambda}.$$

Обратите внимание! Ранее мы говорили про спектральные приборы, и велик соблазн на автомате написать нечто вроде

**Разрешающая способность (сила)  $R = \lambda/\delta\lambda$**  – отношение характерной длины волны  $\lambda$  исслед. излучения к пределу разрешения  $\delta\lambda$ . Но всё это с лямбдами относится только к спектральным приборам!

Тут, в отличие от спектральных приборов, нас интересует угол, а не длина, поэтому предел разрешения – это минимально возможный УГОЛ, а  $R$ , разрешающая способность, тогда по определению  $1/\text{предел разрешения угла}$ . Вот что остаётся неизменным – так это обратная пропорциональность  $R$  от предела разрешения. Чем меньше предел разрешения, тем больше разрешающая способность  $R$ , тем лучше прибор.

Перейдём к микроскопу. Как он устроен?



Собирающая линза на границе преломления двух сред!

Оказывается, что максимальное расстояние  $\delta l$  между точками, на котором мы ещё их различаем, это

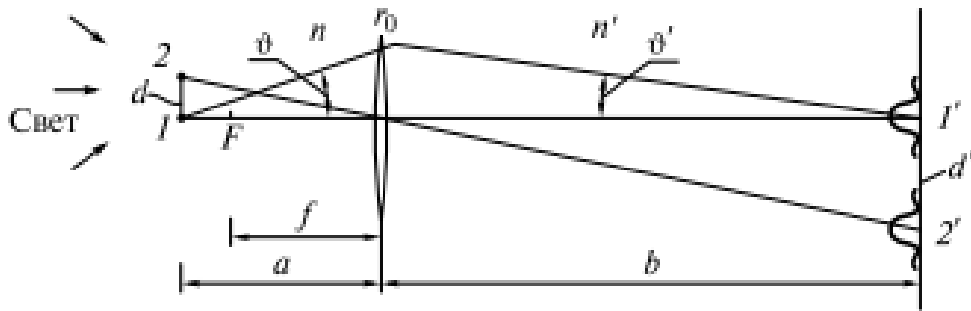
$$l \geq \frac{0,61 \lambda_0}{(n \cdot \sin \varphi_0)} = \delta l$$

Величина в знаменателе называется числовая апертура объектива.

Ну а для нахождения разрешающей способности также поделим 1 на предел разрешения:

$$R = \frac{1}{\delta e} = \frac{n \cdot \sin \varphi_0}{0,61 \cdot \lambda_0}$$

Обратите внимание, что  $R$  здесь размерна – ничего страшного. Возможно, будет более понятна схема микроскопа из учебника:

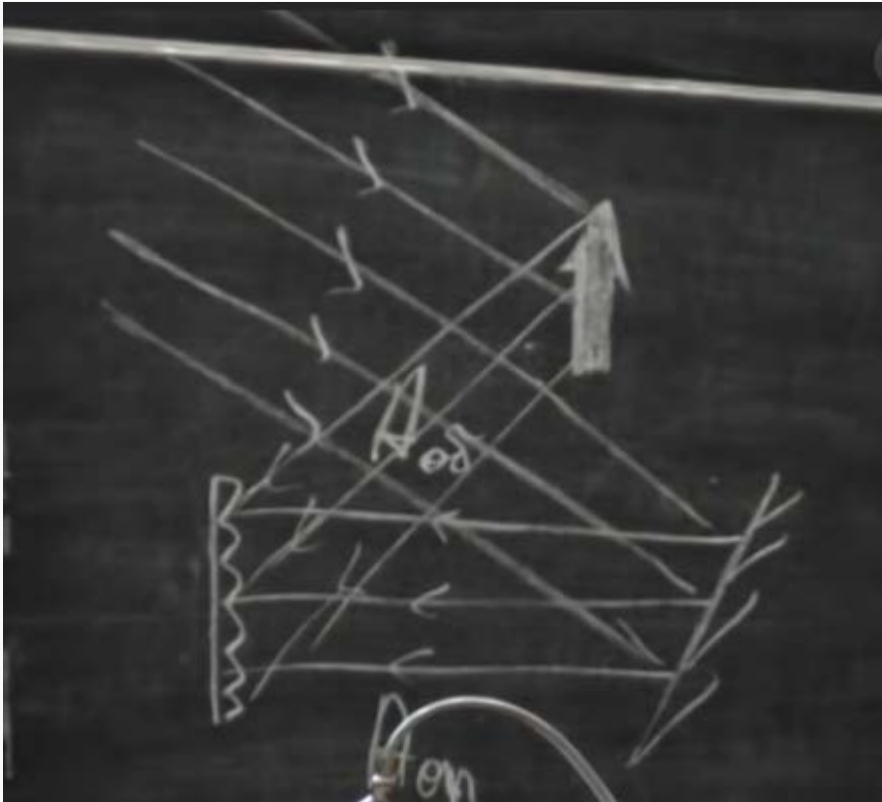


Сделаем замечание: и телескоп, и микроскоп мы излучали обычным, пусть монохроматическим, но не когерентным светом (то есть волны в пучке не согласованы, разность фаз там произвольная). А что будет, если мы их поизлучаем когерентным светом? Проснётся САТАНА... простите, интерференция. Народ, я понимаю, что интерференция и дифракция одновременно – это как намешать коньяк с водкой: и то, и то сатанинская жидкость, но их комбинация убийственно сатанинская. Чуть-чуть осталось, дай я объясню. Дай мне шанс объяснить тебе голограммы. Как же я задолбался писать эту методу. Нафиг оно мне надо? Я же на нормальную кафедру иду, где не будет волн. Итак, продолжаем.

Человечество изобрело фотопластины, фотоплёнки, цифровые фотоаппараты, но они все они регистрируют интенсивность волны, которая на них падает.

Информация о фазе теряется. И вот в 1948 англофизик венгерского происхождения Деннис Габор предлагает следующее: вместо интенсивности падающей волны (назовём её сигнальной, или объектной) на пластинку записывать результат интерференции двух волн: нашей падающей сигнальной волны и так называемой опорной, которая когерентна сигнальной.

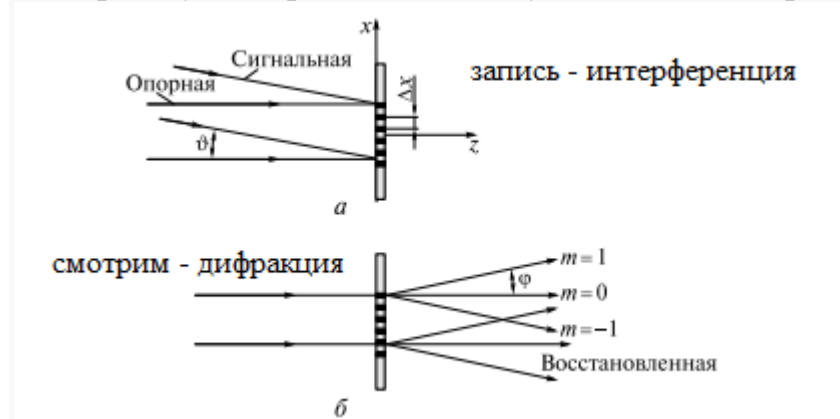
Схема записи:



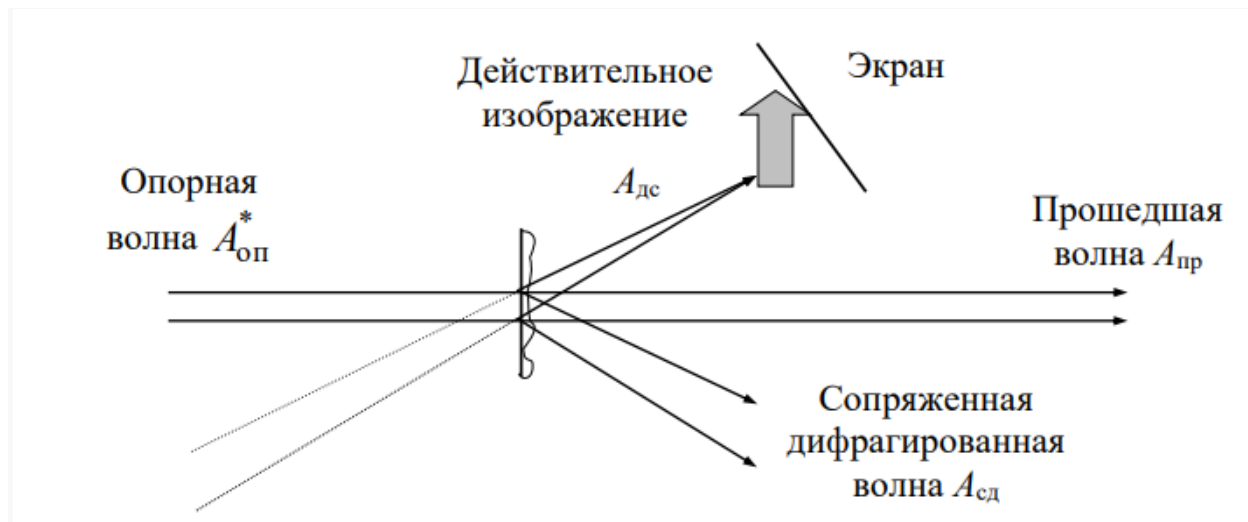
Часть волн отражается от объекта-стрелочки – это сигнальные волны. Часть долетает до зеркала и отражается уже от него – это опорные волны.

- Ну и где здесь дифракция? – спросите вы. – Это ж чистая интерференция.

Нит, лалки, есть тут дифракция, но не на процессе записи, а когда мы на эту голограмму смотрим. В этом случае пластинка работает как диффрорешётка:



Для восстановления направляем на пластинку пучок опорных волн с другого направления, противоположному тому, откуда велась запись:



Часть волн проходит, а вот часть отражается под углом. Один пучок таких волн даст мнимое изображение, а другой – действительное, которое и можно увидеть на экране.